

# 確率数理工学8

## ② 確率不等式

Thm ④ 重要

(1) Markov の不等式

$$X: \text{r.v.}$$

$$X \geq 0 \quad (\text{a.s.}) \text{ とおす.}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ と}$$

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E[X]}{\varepsilon}$$

(2) Chebyshev の不等式

$$P(|X - E[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}[X]}{\varepsilon^2}$$

Proof

$$(1) \quad E[X] = E[X \mathbb{1}\{X \geq \varepsilon\} + X \mathbb{1}\{X < \varepsilon\}] \\ \geq E[\varepsilon \mathbb{1}\{X \geq \varepsilon\}] + 0 \\ = \varepsilon \cdot E[\mathbb{1}\{X \geq \varepsilon\}] = \varepsilon P(X \geq \varepsilon) \quad //$$

$$(2) \quad P(|X - E[X]| \geq \varepsilon) = P(|X - E[X]|^2 \geq \varepsilon^2) \\ \leq \underbrace{\frac{E[|X - E[X]|^2]}{\varepsilon^2}}_{\text{Markov}} = \frac{\text{Var}[X]}{\varepsilon^2} \quad //$$

(例)  $X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$  ( $X_i: \text{i.i.d.}, \text{Var}[X_i] = \sigma^2 < \infty$ )

$$\Rightarrow \text{Var}[X] = \frac{1}{n} \sigma^2 \Rightarrow P(|X - E[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n \varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varepsilon' \text{ とおきなおせば. } P(|X - E[X]| \geq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \varepsilon') \leq \frac{1}{\varepsilon'^2}$$

$$\Rightarrow |X - E[X]| = O_p\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) : \text{重要}$$

## Cor (Markovの不等式の一般化)

$\varphi$ : 単調増加かつ  $\varphi(0) > 0$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ), 可測

$$P(X \geq a) \leq \frac{E[\varphi(X)]}{\varphi(a)} \quad (\forall a \in \mathbb{R})$$

( $\therefore$ ) Markovの不等式より  $P(X \geq a) = P(\varphi(X) \geq \varphi(a)) \leq \frac{E[\varphi(X)]}{\varphi(a)} //$

Cor  $P(X \geq a) \leq \frac{E[e^{tx}]}{e^{ta}} \quad (\forall t \geq 0, a \in \mathbb{R})$

\* モーメント母関数を用いて  $X$  の裾確率を評価できる。  
→ 様々な裾確率集中不等式に用いられている。

## Thm (Hoeffdingの不等式) (★)

← 同一である必要はない

$X_1, \dots, X_n$ : 独立 s.t.  $a \leq X_i \leq b$  ( $\forall i=1, 2, \dots, n$ )

$E[X_i] = 0$  とおす。

$\geq 0$  とす。

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(-\frac{2n\varepsilon^2}{(b-a)^2}\right)$$

(  $P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right| \geq \varepsilon\right) \leq 2 \exp\left(-\frac{2n\varepsilon^2}{(b-a)^2}\right)$  としても可 )

## Note

$\varepsilon = \frac{b-a}{\sqrt{2n}}$  とおけば。

$$\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right| \geq \frac{b-a}{\sqrt{2n}}$$

とある裾確率  $A \cdot 2e^{-A^2}$  以下である。  $\Rightarrow \left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right| = O_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

→ 大数の法則, 中心極限定理

(★) 先の Chebyshevの不等式と比較。裾確率  $A \cdot$

$O\left(\frac{1}{A^2}\right)$  に対して  $O\left(e^{-A^2}\right)$  に比べ、2つ。

(2乗)

(指数)

→  $X_i$  の有界性を用いて利の作る裾確率評価は存在, 2つ。

Proof

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq \varepsilon\right) \leq \frac{E[e^{t \sum_{i=1}^n X_i}]}{e^{n t \varepsilon}} \quad (t > 0)$$

$$= \frac{\prod_{i=1}^n E[e^{t X_i}]}{e^{n t \varepsilon}} \quad (\because \text{独立})$$

$E[e^{t X_i}]$  を評価する.

$$a \leq X_i \leq b \text{ かつ } X_i = d b + (1-d) a \quad \left(d = \frac{X_i - a}{b - a} \text{ と書くと}\right)$$

$x \mapsto e^{t x}$  の凸性より

$$\boxed{0 \leq d \leq 1}$$

$$e^{t X_i} \leq d e^{t b} + (1-d) e^{t a}$$

である. 右辺の期待値をとると.

$$E[e^{t X_i}] \leq E[d] e^{t b} + E[1-d] e^{t a}$$

$$= -\frac{a}{b-a} e^{t b} + \frac{b}{b-a} e^{t a}$$

$$= p e^{t b} + (1-p) e^{t a}$$

$$\left(\text{ただし } p = -\frac{a}{b-a} \geq 0\right)$$

$$\psi(t) = \ln(p e^{t b} + (1-p) e^{t a}) \text{ とおくと}$$

この時  $P(Z=b) = p, P(Z=a) = 1-p$  なる  $Z$  の 2 点分布 (母関数)

$$\psi(0) = \ln(1) = 0$$

$$\psi'(0) = \frac{p b e^{0} + (1-p) a e^{0}}{p e^{0} + (1-p) e^{0}} \Big|_{t=0} = 0 \quad (\text{平均})$$

$$\psi''(t) = \frac{p b^2 e^{t b} + (1-p) a^2 e^{t a}}{p e^{t b} + (1-p) e^{t a}} - \frac{(p b e^{t b} + (1-p) a e^{t a})^2}{(p e^{t b} + (1-p) e^{t a})^2}$$

$$\Rightarrow p_t = \frac{p e^{t b}}{p e^{t b} + (1-p) e^{t a}} \text{ とおくと}$$

$Z_t \in \{b, a\}$   $P(Z_t = b) = p_t, P(Z_t = a) = 1 - p_t$  なる r.v. とおくと.

$$\psi''(t) = b^2 p_t + a^2 (1-p_t) - (b p_t + a (1-p_t))^2$$

$$= \text{Var}[Z_t] = \text{Var}\left[Z_t - \frac{a+b}{2}\right] \leq E\left[\left(Z_t - \frac{a+b}{2}\right)^2\right] \leq \frac{(a-b)^2}{4}$$

まず

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \psi(0) + t \psi'(0) + \frac{1}{2} t^2 \psi''(\xi) \quad (0 \leq \xi \leq t) \\ &\leq 0 + 0 + \frac{1}{8} t^2 (a-b)^2 \end{aligned}$$

次に

$$E[e^{tX_i}] \leq \exp\left(\frac{t^2}{8} (b-a)^2\right) \quad (t \geq 0)$$

よって

$$\frac{\prod_{i=1}^n E[e^{tX_i}]}{e^{tn\epsilon}} \leq \exp\left(\frac{nt^2}{8} (b-a)^2 - tn\epsilon\right)$$

$$\Rightarrow t = \frac{4\epsilon}{(b-a)^2} \quad \text{と } t \wedge t\psi(t)$$

$$\text{右辺} \leq \exp\left(\frac{2n\epsilon^2}{(b-a)^2} - \frac{4n\epsilon^2}{(b-a)^2}\right) = \exp\left(-\frac{2n\epsilon^2}{(b-a)^2}\right)$$

$$\bullet \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right| \geq \epsilon \text{ のとき } P\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right| \geq \epsilon\right) \leq P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq \epsilon\right) + P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-X_i) \geq \epsilon\right)$$

から続く

Note

$a_i \leq X_i \leq b_i$  のように  $a, b$  が  $i$  に依存するとき

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq \epsilon\right) \leq \exp\left(-\frac{2n\epsilon^2}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right)$$

と主張できる。

• 証明は

$$E[e^{tX_i}] \leq e^{\frac{t^2}{2} \sigma^2} \quad (b_i): \text{sub-Gaussian}$$

← Gauss の条件が緩いから成り立つ

よって  $X_i$  が有界なとき

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq \epsilon\right) \leq \exp\left(-\frac{n\epsilon^2}{2\sigma^2}\right)$$

が成り立つ。



## Thm (Bernstein の不等式)

$X_1, \dots, X_n$ : 独立 (同-分布限定なし)

$E[X_i] = 0$ ,  $\text{Var}[X_i] \leq \sigma^2$ ,  $|X_i| \leq M$  (a.s.)

なら

$$P\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \geq t\right) \leq \exp\left(-\frac{nt^2}{2\sigma^2 + \frac{2M}{3}t}\right) \quad (t \geq 0) //$$

$\Rightarrow$  分散の情報を利用して

分散が小さい場合は、よりよいバウンドを得る。

\* Hoeffding, Bernstein および他の極値は統計や学習理論で頻繁に用いられる。

## 参考 Thm (Gaussian 集中不等式)

$X_1, \dots, X_n$  は独立同一に標準正規分布に従うとする。

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  は  $L$ -Lipschitz 連続とする。

$$P\left(f(X_1, \dots, X_n) - E[f(X_1, \dots, X_n)] \geq t\right) \leq e^{-\frac{t^2}{2L^2}} \quad (t > 0) //$$

\* 裾確率は次元  $n$  に依存しない!

ある有限な関数クラス  $G$  に対し

$$f(x_1, \dots, x_n) := \sup_{g \in G} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i g(z_i) \quad (z_i \text{ は固定})$$

これを用いる。  $\rightarrow$  ノンパラメトリック, 学習理論で現れる (Gaussian width)

## Thm (Talagrand の集中不等式)

$G: \|\cdot\|_\infty$ -norm に関して可能な関数クラス

$\forall g \in G$   $E[g(X)] = 0$ ,  $\text{Var}[g] \leq \sigma^2$ ,  $\|g\|_\infty \leq M$  なら

$$P\left(\sup_{g \in G} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i) \geq 2 E\left[\sup_{g \in G} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(X_i)\right] + \sqrt{\frac{2t\sigma^2}{n}} + \frac{2M}{n}t\right) \leq e^{-t} //$$

# ④ 確率変数列の収束 ★重要

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ : prob. sp.

$X_1, X_2, \dots$ : r.v. の列 on  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$

$X$ : 別の r.v.

$F_n$ :  $X_n$  の分布関数

$F$ :  $X$  の分布関数

## Def (確率変数列の収束) ★重要

1. 根拠収束 (convergence almost surely)

$$X_n \xrightarrow{\text{a.s.}} X \stackrel{\text{def}}{\iff} P\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right) = 1$$

2. 確率収束 (convergence in probability)

$$X_n \xrightarrow{P} X \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0$$

3.  $p$ -次平均収束,  $L^p$ -収束 (conv. in  $p$ -th degree mean, conv. in  $L^p$ )

$$X_n \xrightarrow{L^p} X \stackrel{\text{def}}{\iff} \|X_n - X\|_p \rightarrow 0 \quad (p \geq 1)$$

4. 法則収束 (convergence in law, distribution weak convergence)

$$X_n \xrightarrow{w} X \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \text{ の } F(x) \text{ の連続点 } x \text{ において}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

※  $L^p$ -空間は  $L^p$ -収束に関して 完備 (任意の  $Cauchy$ -列が  $L^p$ -空間内で収束先を持つ)  
 $\implies$   $L^p$ -空間は Banach 空間

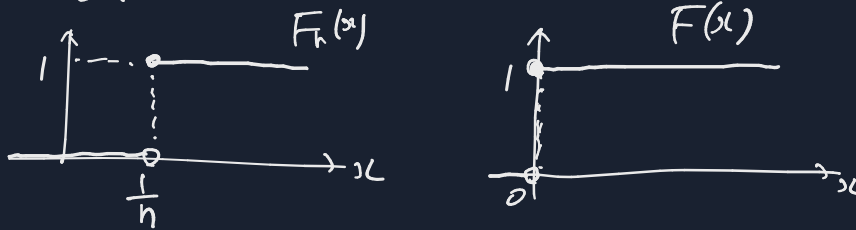
• 収束の定義

- Fの連続点、 $x$ のみ定義(2つの理由):

$$X_n \in P(X_n = \frac{1}{n}) = 1 \text{ なる r.v.}$$

$$X \in P(X=0) = 1 \text{ なる r.v.}$$

とすると



$\frac{1}{n} \rightarrow 0$  かつ  $X_n \rightsquigarrow X$  と思いたい。

しかし  $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(0) \neq F(0)$  かつ不連続点  $x=0$  かつ

収束が成り立たない。→ 不連続点を除外した方が都合良い。

→ 弱収束 とは言う。

別定義 (Portmanteauの定理)

$$\textcircled{\ast} \bullet X_n \rightsquigarrow X \iff \forall f: \text{有界連続関数} \text{ に対し. } E[f(X_n)] \rightarrow E[f(X)]$$

• 任意の開集合  $A$  に対し.

$$\limsup P(X_n \in A) \leq P(X \in A)$$

• 任意の開集合  $B$  に対し.

$$\liminf P(X_n \in B) \geq P(X \in B)$$

かつ  $C_0$ : 有界連続関数  $f$  かつ  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$  なる関数の集合

$C_0$  上の任意の有界線形写像  $T$  は

ある正則 Borel 測度  $\mu$  を用いて.

$$T(f) = \int f d\mu$$

と書ける。

(Rieszの表現定理)

$\mu: \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty]$  (非負 Borel 測度)

$\mu^*$ :  $\mu$  により定めた外測度

補足

Def. (1)  $\mu$  は正則 Borel  $\Leftrightarrow \forall A \subseteq \mathbb{R}^d, \exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  s.t.  $A \subseteq B$  かつ  $\mu^*(A) = \mu(B)$ .

(2)  $\mu$  は Radon  $\Leftrightarrow$  正則 Borel かつ、任意のコンパクト集合  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  に対し  $\mu(K) < \infty$ .

$C_c$ : コンパクト台を持つ有界連続関数の集合.

Thm (1-2 の表現定理)

$L: C_c \rightarrow \mathbb{R}$  を線形汎関数とし、

$$\sup \{ L(f) \mid f \in C_c, \|f\|_\infty \leq 1, \text{supp}(f) \subseteq K \} < \infty$$

かつ任意のコンパクト集合  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  に対し (2) 成り立つものとする。

すると、ある Radon 測度  $\mu$  と、 $\mu$ -可測関数  $\sigma$  で

$$|\sigma(x)| = 1 \quad (\mu\text{-a.e.})$$

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f \cdot \sigma \, d\mu$$

とできる。

Radon 測度の汎弱収束 (Weak\*-convergence)

以下は同値.

(1)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \int f \, d\mu_k = \int f \, d\mu \quad (\forall f \in C_c)$

(2) 任意のコンパクト集合  $K$  に対し  $\limsup_{k \rightarrow \infty} \mu_k(K) \leq \mu(K)$  かつ

任意の開集合  $U$  に対し  $\mu(U) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k(U)$ .

(3)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(B) = \mu(B)$  かつ任意の有界ホールド集合  $B$  で  $\mu(\partial B) = 0$  なる  $B$  に対し成り立つ。

narrow topology における測度の収束 (狭位相)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f \, d\mu_k = \int f \, d\mu \quad (\forall f: \text{有界連続})$$

汎弱収束 (狭位相) と収束 (狭位相)

有界な場合:

(2) 制,  $\mu(\mathbb{R}^d) < \infty, \mu_n(\mathbb{R}^d) < \infty$  のとき

1.  $\mu_n \rightarrow \mu$  (狭位相)

2.  $\mu_n \rightarrow \mu$  (汎弱)

かつ  $\mu_n(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mu(\mathbb{R}^d)$

は同値.  $\Rightarrow$  確率測度なら等価

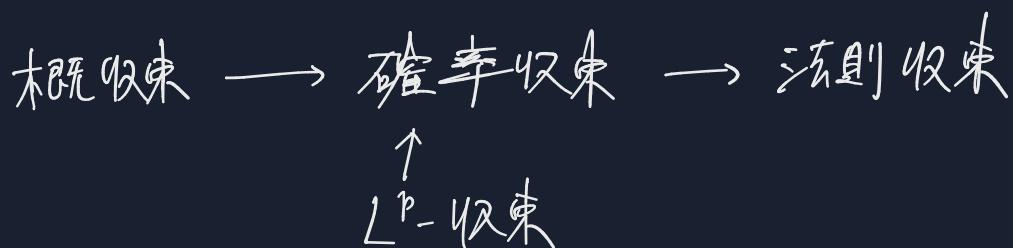
$f(x) = \sin(\pi x + \frac{\pi}{2}), \mu_k = \delta_k$  とすると  $\delta_k \rightarrow \mu$  (汎弱) で  $\delta_k \not\rightarrow \mu$  (狭位相).

# Thm (収束間の関係性)

$$(1) X_n \xrightarrow{a.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$$

$$(2) X_n \xrightarrow{p} X \Rightarrow X_n \rightsquigarrow X$$

$$(3) X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{p} X$$



Proof

(1)  $X_n \xrightarrow{a.s.} X$  かつ

$$P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq N} \left\{ |X_n - X| \leq \frac{1}{m} \right\}\right) = 1$$

$\uparrow$  任意の  $m$  に対し、ある  $N$  が存在し、任意の  $n \geq N$  に対し、 $|X_n - X| \leq \frac{1}{m}$  が成立する事象

と等しい事象。すなわち、 $\forall \varepsilon > 0$  に対し、十分大整数  $m_0$  存在し、  
 素直に  $\frac{1}{m_0} \leq \varepsilon$  とする。

$$1 = P\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq N} \{ \dots \} \right)$$

$$\leq P\left(\bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n \geq N} \left\{ |X_n - X| \leq \frac{1}{m_0} \right\}\right)$$

$$= \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{n \geq N} \left\{ |X_n - X| \leq \frac{1}{m_0} \right\}\right)$$

$$\leq \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\left\{ |X_N - X| \leq \frac{1}{m_0} \right\}\right)$$

$$\leq \lim_{N \rightarrow \infty} P\left(\left\{ |X_N - X| \leq \varepsilon \right\}\right)$$

つまり、 $X_n \xrightarrow{p} X$  である。

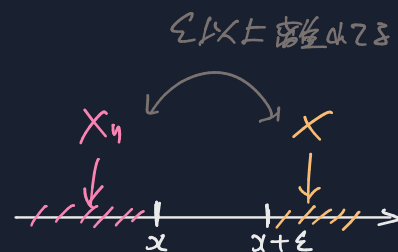
(2)  $x \in F$  の連続点とする.

$$F_n(x) = P(X_n \leq x)$$

$$= P(\{X_n \leq x\} \cap \{x \leq x + \varepsilon\})$$

$$+ P(\{X_n \leq x\} \cap \{x > x + \varepsilon\})$$

$$\leq \underbrace{P(X \leq x + \varepsilon)}_{F(x + \varepsilon)} + \underbrace{P(|X_n - x| \geq \varepsilon)}_{\downarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 0 \quad (\because X_n \xrightarrow{P} x)}$$



$$F(x - \varepsilon) = P(X \leq x - \varepsilon)$$

$$= P(\{X \leq x - \varepsilon\} \cap \{X_n \leq x\})$$

$$+ P(\{X \leq x - \varepsilon\} \cap \{X_n > x\})$$

$$\leq \underbrace{P(X_n \leq x)}_{F_n(x)} + \underbrace{P(|X - X_n| \geq \varepsilon)}_{\downarrow \lim_{n \rightarrow \infty} 0}$$

以上より  $F(x - \varepsilon) \leq \liminf F_n(x) \leq \limsup F_n(x) \leq F(x + \varepsilon)$

$F$  は連続な点  $x$ :  $\varepsilon \rightarrow 0$  とする  $\varepsilon > 0$ .

$$F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x)$$

を得る.

(3) Markov の不等式 (\*)

$$\forall \varepsilon > 0: P(|X_n - x| \geq \varepsilon) \leq \frac{E[|X_n - x|^p]}{\varepsilon^p} \rightarrow 0$$

$$(\because X_n \xrightarrow{L^p} X)$$

(注) 弱収束にあつたは  $X_n$  と  $X$  は同じ prob. sp. 上にいる必要があつた。  
確率収束と概収束は同じ prob. sp. 上である。

# 反例

(1) の逆は成り立たない例

(各  $n \in \mathbb{N}$  に対して,  $X_n \subset X$  は十分近いから,  
 $(X_n(\omega))_{n=1}^{\infty}$  と  $n \in \mathbb{N}$  を通じた列を考慮して  $X(\omega)$  を収束(する)  
 状況を考慮すれば良い.

$\Omega = [0, 1)$ ,  $P$  は  $\Omega$  上の一様分布

$n = 1, 2, 2^2, 2^3, \dots$  とする. ( $n = 2^k$ )

$$X_{n,i} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & (\frac{i-1}{n} \leq \omega < \frac{i}{n}) \\ 0 & \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$k=0$ :  $X_1 = X_{1,1} = 1$  (a.s.)

$k=1$ :  $X_2 = X_{2,1} = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{2})}$

$X_3 = X_{2,2} = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, 1)}$

$k=2$ :  $X_4 = X_{4,1} = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{4})}$

$X_5 = X_{4,2} = \mathbb{1}_{[\frac{1}{4}, \frac{1}{2})}$

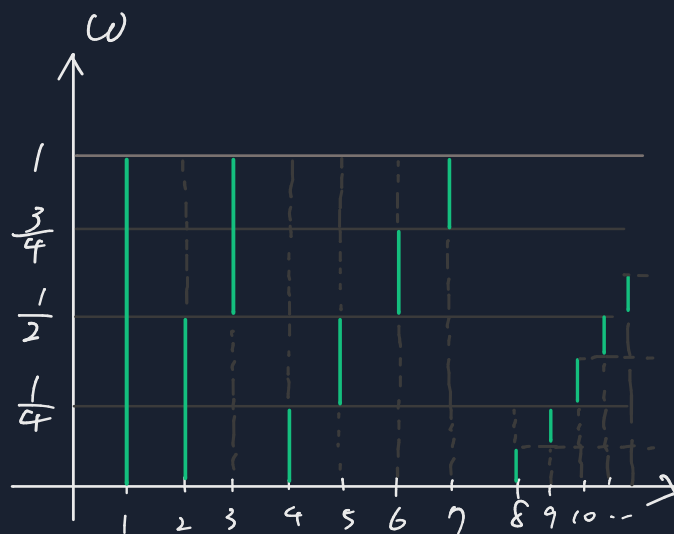
$X_6 = X_{4,3} = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2}, \frac{3}{4})}$

$X_7 = X_{4,4} = \mathbb{1}_{[\frac{3}{4}, 1)}$

$k=3$ :  $X_8 = X_{8,1} = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{8})}$

⋮

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega \in A) \\ 0 & (\omega \notin A) \end{cases}$$



— 2.1, 2.4, 2.8, 2.16, 2.32, 2.64

とすると  $P(|X_m| \geq \epsilon) \leq \frac{1}{2^k}$  (if  $2^k \leq m < 2^{k+1}$ ) ( $0 < \epsilon \leq 1$ )

すなわち  $X_m \xrightarrow{P} 0$

しかし  $\forall \omega \in [0, 1)$  1-つづき  $\limsup_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = 1$ ,

$\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = 0$  ほとんど.

a.s. 2-収束(する)が成り立たない. したがって  $X_n \xrightarrow{a.s.} X = 0$  は成り立たない. //

(2) の逆例. 成り立たない例]

$\Omega = \{0, 1\}$  とし.  $P(\omega=0) = P(\omega=1) = \frac{1}{2}$  とする.

$$X_n(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega=0) \\ 0 & (\omega=1) \end{cases}$$

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & (\omega=0) \\ 1 & (\omega=1) \end{cases}$$

しかし. 当然  $|X_n - X| = 1$  (a.s.) となる.  $X_n \xrightarrow{p} X$  ではない.

しかし.  $F_n(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ \frac{1}{2} & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (1 \leq x) \end{cases} = F(x) \text{ ではない.}$

$F_n(x) = F(x)$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ ) となる. 特例.  $X_n \xrightarrow{d} X$  である.

$\hookrightarrow \lim F_n(x) = F(x)$  である.





# 演習問題

(1)  $X_n \xrightarrow{p} X$  なる、ある部分列  $(X_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  が存在し、

$X_{n_k} \xrightarrow{a.s.} X$  とするのを示せ。

(ヒント: Borel-Cantelli の補題: 1-19)

(2)  $(X_n)$  が、確率収束の意味での  $\mathcal{C}$ - $\mathcal{C}$ - $\mathcal{C}$  列 (2-2-in prob.)  
 $\iff \forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0$  に対し、 $\exists N$  2.  

$$P(|X_n - X_m| \geq \varepsilon) \leq \delta \quad (\forall n, m \geq N)$$
  
 とする。

(a)  $X_n \xrightarrow{p} X$  なる  $(X_n)$  は  $\mathcal{C}$ - $\mathcal{C}$ - $\mathcal{C}$  列 in prob. 2-2-2 とするのを示せ。

(b)  $(X_n)_n$  が  $\mathcal{C}$ - $\mathcal{C}$ - $\mathcal{C}$  in prob. のとき、ある r.v.  $X$  が存在し、

$X_n \xrightarrow{p} X$  とするのを以下の手順で示せ:

(i) ある部分列  $(n_j)_{j=1}^{\infty}$  が存在し、

$$P(|X_{n_{j+1}} - X_{n_j}| > 2^{-j}) < 2^{-j}$$

とすることを示せ。

(ii)  $X_{n_j}$  は a.s. 2-2-2 とするのを示せ (ヒント: Borel-Cantelli)  
 その収束先を  $X$  とおく。 ( $X$  は可測)

(iii)  $X_n \xrightarrow{p} X$  を示せ。

(3)  $(X_n)_n$  が一様可積分  $\iff \lim_{a \rightarrow \infty} \sup_n \int_{|X_n| \geq a} |X_n| dP \rightarrow 0$

とする。

$(X_n)$  が一様可積分ならば、 $\sup_n E[|X_n|] < \infty$  とするのを示せ。

(4)  $X_n$  が単調増大な r.v. 2-2-2  $X_n \xrightarrow{p} X$  とする。

2-2-2  $X_n \xrightarrow{a.s.} X$  2-2-2 とするのを示せ。

(5)  $X_n \xrightarrow{p} X \iff$  任意の部分列  $(X_{n_k})_{k=1}^{\infty}$  必し  $X$  に収束する部分列  $(X_{n_{k_j}})_{j=1}^{\infty}$  を持ち、 $X_{n_{k_j}} \xrightarrow{a.s.} X$  である。  
 二の二を証明せ。

(6)  $X_n \xrightarrow{p} X, Y_n \xrightarrow{p} Y$  である。

(a)  $X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + Y$  を示せ。

(b)  $X_n Y_n \xrightarrow{p} XY$  を示せ (5) を用いて示せ)

(7)  $(X_n)_n$  : i.i.d. であり、 $E[X_n] = \mu, \text{Var}[X_n] = \sigma^2$  ( $\sigma^2 < \infty$ ) である。

$$\hat{\sigma}_n^2 := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2 \xrightarrow{p} \sigma^2$$

であることを示せ。

(8) 以下を示せ:

(a)  $X_n \xrightarrow{a.s.} 0 \implies \bar{X}_n (= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i) \xrightarrow{a.s.} 0$

(b)  $X_n \xrightarrow{L^p} 0 \implies \bar{X}_n \xrightarrow{L^p} 0$   
 ( $p \geq 1$ )

(c)  $X_n \xrightarrow{p} 0 \implies \bar{X}_n \xrightarrow{p} 0$  と 同様に示すことは反例を挙げることができる。

(d)  $\bar{X}_n \xrightarrow{p} 0 \implies \frac{X_n}{n} \xrightarrow{p} 0$

(9)  $S \subset \mathbb{R}^d$  をコンパクト集合とする。

(参考問題)

$S$  上のカウシ過程  $G_u$  ( $u \in S$ ) とは、任意の有限個の

$\{u_1, \dots, u_\ell\} \subset S$  に対し、 $(G_{u_1}, \dots, G_{u_\ell})$  が多変量正規分布に従うことを示す。

ある2つの  $\mathcal{F}$  上の Gauss 過程  $G_u, G'_u$  が

$$(i) E[G_u] = E[G'_u] = 0 \quad (u \in \mathcal{F})$$

$$(ii) E[(G_u - G_v)^2] \leq E[(G'_u - G'_v)^2] \quad (u, v \in \mathcal{F})$$

をみたし、 $G_u, G'_u$  は  $\mathcal{F}$  上の a.s. 2-変数  $u, v$  有界かつ連続な関数と  
 なる。このとき、

$$E\left[\sup_{u \in \mathcal{F}} G_u\right] \leq E\left[\sup_{u \in \mathcal{F}} G'_u\right]$$

を示す。これは known result (Stein の不等式)

今、 $\mathcal{S}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$  上の単位球面 ( $\mathcal{S}^{d-1} = \{ \|x\| = 1 \mid x \in \mathbb{R}^d \}$ ) とする。

$(A_{ij})_{1 \leq i \leq d, 1 \leq j \leq d}$  を  $A_{ij}$  が i.i.d.  $N(0, 1)$  に従うランダム  
 行列とする。

ある  $u \in \mathcal{S}^{d-1}, v \in \mathcal{S}^{d-1}$  とする。

$$G_{(u,v)} := u^T A v$$

とする。一方  $g, g'$  を独立な  $\mathbb{R}^d$ -値 r.v. とし、 $g \sim N(0, I), g' \sim N(a, I)$   
 とする。 (多変量正規分布)

$$G'_{(u,v)} := u^T g + v^T g'$$

と仮定する。

$$E\left[\sup_{(u,v) \in \mathcal{S}^{d-1} \times \mathcal{S}^{d-1}} G_{(u,v)}\right] \leq E\left[\sup_{(u,v) \in \mathcal{S}^{d-1} \times \mathcal{S}^{d-1}} G'_{(u,v)}\right]$$

を示す。まず、

$$E\left[\|A\|\right] \leq 2\sqrt{d}$$

↑  
operator-norm

$$\|A\| := \sup_{\substack{u \in \mathcal{S}^{d-1} \\ v \in \mathcal{S}^{d-1}}} u^T A v$$

を示す。

(10) (9)の設定で: Gaussian 集中不等式より

(参考問題)  $P(\|A\| \geq 2\sqrt{d} + t) \leq \exp(-\frac{t^2}{2}) \quad (t > 0)$

を示せ. (ランダム行列の作用素ノルム)

(11)  $X_i$  を i.i.d., 非負の r.v. とする.

$$M_n = \max_{i=1, \dots, n} X_i \quad \text{と} \text{する.}$$

(a)  $P(M_n > x) \leq n P(X_1 > x) \quad (x > 0)$  を示せ.

(b)  $\frac{M_n}{n} \xrightarrow{P} 0 \iff n P(X_1 > n) \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$

を示せ.